Aufgabe 1 (*33 Punkte, ca. 20 Minuten*) Ein Konditor stellt zu Ostern besonders exklusive Osterhasen (x_1) und Ostereier (x_2) her. Diese bestehen aus einer Schokoladengrundmasse und werden mit weiteren Zutaten veredelt. Da diese exklusiven Zutaten eine lange Lieferzeit haben, kann der Konditor für die Osterzeit nur mit den im Lager vorhanden Zutaten produzieren. Für die Herstellung eines Osterhasen werden $20g$ weisse Schokolade, 10g Zartbitterschokolade und 50 ml Mandellikör benötigt. Die Herstellung des Ostereis braucht 10g weisse Schokolade und 20 g Zartbitterschokolade. Im Lager befinden sich noch 4 kg weisse Schokolade, 8 Liter Mandellikör und 5 kg Zartbitterschokolade. Außerdem liegt dem Konditor eine Bestellung über 200 Ostereier vor. Mit dem Verkauf eines Osterhasen kann er einen Deckungsbeitrag von 8 € und mit einem Osterei von 5€ erzielen.

a) Um mit den vorhandenen Lagermengen einen deckungsbeitragsmaximalen Produktionsplan zu erstellen, hat der Konditor Sie gebeten Ihre OR Fähigkeiten anzuwenden. Formulieren Sie ein LP für dieses Problem.

b) Bestimmen Sie ein optimales Produktionsprogramm. Wenden Sie den primalen Simplex-Algorithmus und die M-Methode an. Geben Sie die Produktionsmengen der Produkte x_1 und x_2, sowie den Gesamtdeckungsbeitrag an. Verwenden Sie die nachfolgenden Simplex-Tableaus. Sollten Sie Teilaufgabe a) nicht lösen können, rechnen Sie mit dem folgenden Modell:

$$\max 16x_1 + 10x_2 \tag{1}$$

u.d.N

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\leq 800 && (2)\\ 10x_1 &\leq 1600 && (3)\\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 1000 && (4)\\ 2x_2 &\geq 400 && (5)\\ x_1, x_2 &\geq 0 && (6) \end{aligned}$$

BV		RHS
F		

BV		RHS
F		

BV		RHS
F		

BV		RHS
F		

BV		RHS
F		

BV		RHS
F		

BV		RHS
F		

BV		RHS
F		

Aufgabe 2 (*34 Punkte, ca. 20 Minuten*)
Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem (P)

$$\max 5x_1 + 6x_2 \tag{1}$$

u.d.N.

$$2x_1 + 3x_2 \leq 360 \tag{2}$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 480 \tag{3}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{4}$$

sowie das Endtableau

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	80
x_1	1	0	$-1/2$	$1/2$	60
F	0	0	$3/2$	$1/2$	780

a) In welchem Intervall darf sich δ bei einer Variation der RHS des Wertes für b_1, also $360 + \delta$, bewegen, ohne dass sich die Menge der Basisvariablen in der optimalen Lösung ändert? Führen Sie eine Sensititvitätsanalyse durch.

b) Was passiert, wenn $b_1 = 210$: Welche Variablen würden sich dann in der optimalen Basis befinden, welche nicht? Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Angenommen, die Variable x_1 soll nun mindestens einen Wert von 90 annehmen. Dem Problem muss also eine zusätzliche Restriktion

$$x_1 \geq 90$$

hinzugefügt werden. Führen Sie eine Reoptimierung des ursprünglichen Problems (P) aus der Aufgabenstellung durch. Wie ändert sich die optimale Lösung?

BV		RHS
F		

BV		RHS
F		

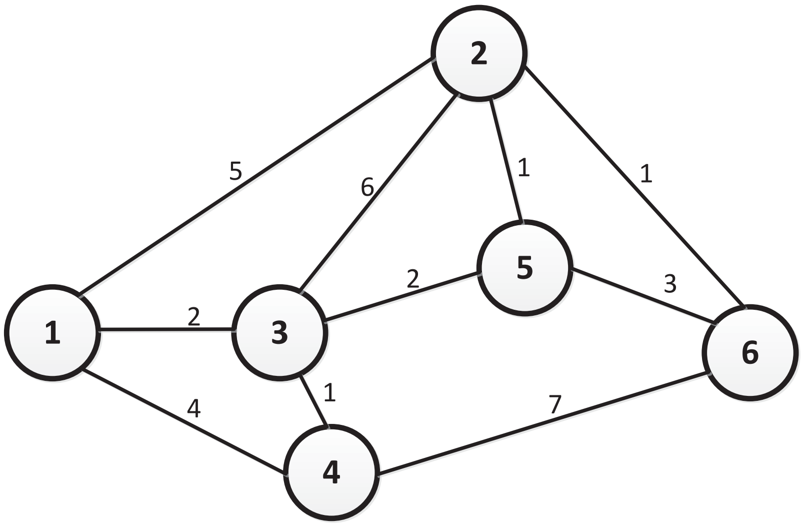
BV		RHS
F		

BV		RHS
F		

BV		RHS
F		

BV		RHS
F		

Aufgabe 3 (*33 Punkte*, *ca. 20 Minuten*) An An einem Donnerstag Abend gibt Hauke mal wieder eine seiner allseits bekannten WG-Parties. Die Stimmung ist bereits auf einem Hoch als Hauke mit Entsetzen feststellen muss, dass er sich bei seinem Biervorrat verkalkuliert hat. Der letzte Kasten ist bereits angebrochen. Um zu verhindern, dass die Gäste die Party frühzeitig verlassen und weiterziehen, ruft er seinen Freund Wolle an, von dem er weiß, dass er immer genügend Bier vorrätig hat. Dieser sagt zu einige Kästen vorbeizubringen. Im unten abgebildeten Graphen seien die Knoten Dörfer und die Kanten die Verbindungen zwischen diesen Dörfern. Die Kantengewichte geben die Entfernungen in Kilometern von einem Dorf zum nächsten an. Nehmen Sie an, dass sich Wolles Wohnung im Knoten 1 befindet und Haukes WG im Knoten 6.



a) Helfen Sie Wolle den kürzesten Weg zu Hauke zu finden, indem Sie den Dijkstra-Algorithmus anwenden. Füllen Sie dazu so viele der nachstehenden Tableaus aus wie Sie benötigen. Wie viele Kilometer legt Wolle auf diesem kürzesten Weg zurück?

$i:$	
D_i	
R_i	

$i:$	
D_i	
R_i	

$i:$	
D_i	
R_i	

$i:$	
D_i	
R_i	

$i:$	
D_i	
R_i	

$i:$	
D_i	
R_i	

$i:$	
D_i	
R_i	

$i:$	
D_i	
R_i	

b) Nachdem Wolle dank des kürzesten Weges rechtzeitig angekommen war und Haukes Party gerettet hatte, überlegten sich die beiden einen Partylieferservice zu gründen, um auch anderen Studenten zur Hilfe zu kommen, wenn alle Getränkemärkte bereits geschlossen haben. In ihrer ersten Nacht als Geschäftspartner melden sich 3 Kunden in Getränkenot mit den Bestellungen $b_1 = 10, b_2 = 5$ und $b_3 = 6$ gemessen in Bierkästen. Wolle hat in seiner Wohnung $a_1 = 10$ Bierkästen stehen und Hauke $a_2 = 11$. Die Transportkosten können der nachstehenden Transportkostenmatrix entnommen werden.

c_{ij}	b_1	b_2	b_3
a_1	4	6	2
a_2	3	7	4

Bestimmen Sie für dieses Transportproblem eine Lösung mit Hilfe der Vogel'schen Approximationsmethode und geben Sie die gesamten Transportkosten an!